Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
9 класс (Азия)

▷ **1.** При подготовке к экзамену три школьника решали 2024 задачи. Каждый решил 1200 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение: 448.
Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_j количество задач, решённых только j-м учеником, через a_{ij} — количество задач, решённых только i-м и j-м учениками, через a_{123} — количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач — $a_1+a_2+a_3$, лёгких — a_{123}. Нас интересует величина $s=a_1+a_2+a_3-a_{123}$. Согласно условию, имеем систему: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_{12}+a_{13}+a_{23}+a_{123}=2024 \\ a_1+a_{12}+a_{13}+a_{123}=1200 \\ a_2+a_{23}+a_{23}+a_{123}=1200 \\ a_3+a_{13}+a_{23}+a_{123}=1200. \end{cases}$
Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1-a_2-a_3+a_{123}=3600-4048=-448$, откуда s=448. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 448.

▷ **2.** Дан отрезок $\sqrt[4]{5}$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{5}$.

Решение: С помощью циркуля и линейки можно из отрезков a и b построить отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{ab}$, а также разделить отрезок на заданное число частей. Прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt[4]{5}$ и $2\sqrt[4]{5}$ имеет гипотенузу $5^{3/4}$.d $=\sqrt{\sqrt[4]{5}\cdot 5^{3/4}}=\sqrt{5}$.

▷ **3.** Пусть $\overline{a_1a_2\dots a_k}$ - десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырёхзначные числа, для которых вычисляется соотношение
$\overline{a_1a_2a_3a_4}=\overline{a_1a_2}\cdot\overline{a_3a_4}+2024$.

Решение:
$\overline{a_1a_2}=x\in[10;99], \overline{a_3a_4}=y\in[10;99]$
$100x+y=x\cdot y+2024$
$(x-1)y-100(x-1)+1924=0$
$(x-1)(100-y)=1924=4\cdot 481=4\cdot 13\cdot 37$
$9\leqslant x-1\leqslant 98$
$1\leqslant 100-y\leqslant 90$
$a\cdot b=4\cdot 3\cdot 37$
$\begin{cases} a=13 \\ b=148 \end{cases}$
$\begin{cases} a=37 \\ b=52 \end{cases}$ $\begin{cases} x=38 \\ y=48 \end{cases}$
$\begin{cases} a=26 \\ b=74 \end{cases}$ $\begin{cases} x=27 \\ y=26 \end{cases}$
$\begin{cases} a=52 \\ b=37 \end{cases}$ $\begin{cases} x=53 \\ y=63 \end{cases}$
$\begin{cases} a=74 \\ b=26 \end{cases}$ $\begin{cases} x=75 \\ y=74 \end{cases}$
$3848-38\cdot 48=2024$
$2726-27\cdot 26=2024$
$5363-53\cdot 63=2024$
$7574-75\cdot 74=2024$

Ответ: $(3848, 5363, 2726, 7574)$

▷ **4.** Площадь треугольника ABC равна 5. В продолжении стороны CA расположена точка M таким образом, что $AM=\frac{1}{3}AC$. В продолжении стороны AB расположена точка N таким образом, что $BN=\frac{1}{3}AB$. В продолжении стороны BC расположена точка K таким образом, что $CK=\frac{1}{3}BC$. Найдите площадь треугольника MKN.

Решение:
Поскольку $AM=\frac{1}{3}AC$, $AN=\frac{4}{3}AB$, $\sin\angle NAM=\sin\angle BAC$, площади треугольников NAM и ABC относятся как $\frac{4}{9}$, то есть $S_{ADC}=\frac{4}{9}*5=\frac{20}{9}$. Такую же площадь имеет каждый из треугольников KBN и MCK. Значит, $S_{MKN}=5+3*\frac{20}{9}=\frac{35}{3}$

▷ **5.** Можно ли представить в виде суммы квадратов трех натуральных чисел числа N, если
а) $N=9\cdot 2^{2024}$,
б) $N=9\cdot 2^{2025}$?

Решение: $9=2^2+2^2+1$
$2\cdot 9=4^2+1^2+1^2$
а) $(2^{1012}\cdot 2)^2+(2^{1012}\cdot 2)^2+(2^{1012}\cdot 1)^2=2^{2024}(\underbrace{2^2+2^2+1}_{9})$

б) $2^{2\cdot 1013-1}\cdot 9 = 2^{2(1013-1)}((2^2)^2+1^2+1^2) = 2^{2\cdot 1013-2}(2\cdot 9) = (2^{1012}\cdot 4)^2+(2^{1012}\cdot 1)^2+(2^{1012})^2$

▷ **6.** Номера каких годов XXI века могут быть представлены в виде $2^n - 2^k$, где n и k - натуральные числа?

Решение: $2^{12}-2^{11}=2^{11}=2048$
$2^{11}-2^5=2016$
$2^{11}-2^4=2032$
$2^{11}-2^3=2040$
$2^{11}-2^2=2044$
$2^{11}-2=2046$

▷ **7.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $20a-24b$.

Решение:
Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию + с двумя аргументами. Выражение 0?((0!(x!0))?0) всегда равно $-x$.
Теперь легко выписать искомое выражение
$((...\underbrace{(a+a)+...+a}_{+19})+(-((...\underbrace{(b+b)+...+b}_{+23})).$

▷ **8.** Последовательность начинается числами 3 и 2. Каждый следующий член последовательности определяется как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 2024 месте?

Решение: Выпишем несколько первых членов последовательности

$$3,\underbrace{2,6,2,2,4,8}_{\textit{период}},2,6,\dots$$

Поскольку в последовательности встретились две цифры 2 и 6, которые были записаны прежде, то дальше цифры будут периодически повторяться.
Длина периода составляет шесть цифр. Делим $(2024-1)$ на 6, получается в остатке 1. Отсчитываем первую цифру в периоде — это 2.

Ответ: 2.

▷ **9.** Решить уравнение $\left[\frac{7+8x}{5}\right]=\frac{10x-1}{3}$, где $[a]$ - целая часть числа a.

Решение: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty), \frac{x}{y}=t$
$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty), \frac{x}{y}=t$
$2+\frac{3}{2}t=\{1+t^2\}$
$\{x+n\}=\{x\}$
$\{t^2\}=2+\frac{3}{2}t, 0\leqslant 2+\frac{3}{2}t<1, -\frac{4}{3}\leqslant t<-\frac{2}{3}$
$\frac{4}{9}<t^2\leqslant 1\frac{7}{9}$

$\frac{4}{9}<t^2<1$
$\{t^2\}=t^2, t\in(-1;-\frac{2}{3})$
$1\leqslant t^2\leqslant\frac{16}{9}$
$\{t^2\}=t^2, t\in\left[-\frac{4}{3};-1\right]$

$t^2-\frac{3}{2}t-2=0$
$t_1=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}+2}=\frac{3+\sqrt{41}}{4}\notin(-1;-\frac{2}{3})$
$t_2=\frac{3-\sqrt{41}}{4}\in(-1;-\frac{2}{3})$

$2.t^2-\frac{3}{2}t-3=0$
$t_1=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}+3}=\frac{3+\sqrt{57}}{4}\notin\left[-\frac{4}{3};-1\right]$
$t_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}\in\left[-\frac{4}{3};-1\right]$
Ответ: $\{\frac{3-\sqrt{57}}{4};\frac{3-\sqrt{41}}{4}\}$.

▷ **10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел m, n, k таких, что $m^3+n^3+k^3=96059601$.

Решение:
$S(96059601)=9\cdot 10673289(=N_1)=9^2\cdot 1185921(=N_2)=9^3\cdot 131769(=N_3)=9^4\cdot 14641(=N_4)=$

$S(N)=36, S(N_1)=36, N_1\vdots 9, S(N_2)=27, N_2\vdots 9, S(N_3)=27, N_3\vdots 9, N_4\vdots 11=11\cdot 1331=11^2\cdot 121=11^4$ $S_1=1+6+1=8, S_2=4+4=8, S_1-S_2=0$
$N=9^4\cdot 11^4=99^4$
$m=\alpha\cdot 99, n=\beta\cdot 99, k=\gamma\cdot 99$
$2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 2^3+3^3+4^3=99$
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=99$
$\alpha=2, \beta=3, \gamma=4$
$(198,297,396)$.
Ответ: (198,297,396).